

赤道からの子午線弧長を任意に与えて該当する緯度を求めるより簡明な計算方法

A More Concise Method of Calculation for the Latitude Corresponding to Arbitrarily Given Meridian Arc Length from the Equator

企画部 河瀬和重
Planning Department Kazushige KAWASE

要 旨

平成 23 年 4 月に公共測量に係る「作業規程の準則」の一部改正が施行されたことに伴い、赤道からの子午線弧長を与えて該当する測地緯度を求める計算式が新たに規定された。この計算式は、それ以前までに規定されていた式よりも簡潔である上に収束が速く、将来の楕円体パラメータの変更に際しても汎用性を保持したものであるが、現状においては式の導出過程が非常に難解であるため、将来の計算機性能向上に備えた精度拡張は容易なことではない。

本論では、非常に単純明快な数学定理を用いて赤道からの子午線弧長を与えて該当する測地緯度を求める計算式を簡明に導出する方法論を紹介する。当該方法論の適用にあたっては、無償の数式処理システムである“Maxima”を用いて、新たに規定された計算式の正確性を改めて確認するとともに、併せて当該計算式について、将来の拡張に備え十分な精度を有する高次の項まで実際に導出を試みた。さらに、一般的な計算機が有する有効桁の観点から当該計算式の精度を評価した。

1. はじめに

平成 23 年 4 月に施行された、作業規程の準則（平成 20 年国土交通省告示第 413 号）の一部改正（国土地理院編，2011）により、赤道からの子午線弧長が与えられた下でそれに該当する測地緯度を計算する計算式が変更された。具体的には、原田（1960）による成果を基にした、地球楕円体の第一離心率 e を用いた計算式から、König et al.（1951）に掲載されている地球楕円体の第三扁平率 n を用いた計算式に変更されたわけである。これにより、計算式が非常にコンパクトになり、計算機へのプログラミングの手間が大幅に軽減されたばかりでなく、将来の楕円体パラメータの変更に際しても特に対応の必要がない汎用性を有するものとなった。

以後の比較等のために、ここで当該計算式を改めて掲げておく。 a を地球楕円体の長半径とするとき、赤道からの子午線弧長 S_{given} が与えられた際の対応する測地緯度 φ は、次式のように与えられる。

$$\varphi \approx \theta + A_2 \sin 2\theta + A_4 \sin 4\theta + A_6 \sin 6\theta + A_8 \sin 8\theta + A_{10} \sin 10\theta \quad (1)$$

$$\theta = \frac{(1+n)S_{given}}{a} \left/ \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} \right) \right., \quad A_2 = \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5,$$

$$A_4 = \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4, \quad A_6 = \frac{151}{96}n^3 - \frac{417}{128}n^5, \quad A_8 = \frac{1097}{512}n^4, \quad A_{10} = \frac{8011}{2560}n^5$$

ここで n は、しばしば地球楕円体の第三扁平率と呼ばれ、地球楕円体の扁平率の逆数（逆扁平率）を F として、

$$n = \frac{1}{2F-1} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}} \cong \frac{e^2}{4} \quad (2)$$

と表される量である。

（1）式に相当する計算式は、筆者が確認できた最も初期のものは Helmert（1880）に掲載されているものであり、ここでは n^3 までの項が与えられている。その後、 n^4 の項まで近似を進めた計算式について Krüger（1912）及び Adams（1921）において掲載されていることが認められ、さらに König et al.（1951）において（1）式に示す n^5 の項までの計算式が与えられた。この式は König et al.（1951）の引用という形で Ганьшин（1967）にも掲載されている。

(1) 式自体は、原田 (1960) による計算式よりも簡潔にまとまっていることに加えて収束が格段に良好なものではあるものの、König et al. (1951) においてはその導出に際して非常に難解な複素解析が駆使されており、ドイツ語の書物であるということも相俟って (1) 式の導出過程自体を完全にフォローするのは容易なことではない。また、(1) 式は 32bit 計算機での倍精度実数型計算における計算精度 (有効桁 15 桁) を与えるには十分であることが分かっているが、将来普及することが予想される 64bit 計算機での拡張倍精度実数型計算における計算精度 (有効桁 18 桁) でのカバーについては微妙であり、今少し高次の項を将来のために準備しておきたいところである。

一方、別のアプローチとしては、例えば齋藤 (1973) による漸化式を用いた、より一般的に応用可能な方法が挙げられ、これを応用した本論と同じ問題に対応する数式計算の試みも行われている (政春, 2001)。しかしながら、計算に当たって漸化式のお膳立てが必要であること、一つ一つ係数を用意しなければならないことなどに加え、実際に計算するには相当の知見を必要とし、これらの点で改善の余地が残っている。また、Bowring (1983) においては、複素数を用いた巧妙な計算式が導出されているが、簡潔さと計算精度の厳密さを犠牲にしている。

そこで筆者は、König et al. (1951) や齋藤 (1973) とは別のアプローチから、(1) 式に相当する計算式をより単純明快な方法論で十分な精度まで導出することを試みた。その糸口は、Adams (1921) に見ることができる、“Lagrange inversion theorem” を用いる方法である。

2. Lagrange inversion theorem

18 世紀後期に、Joseph-Louis Lagrange は任意の解析関数の逆関数に相当する Taylor 級数展開を与える定理を発表した (Lagrange, 1770)。この定理は“Lagrange inversion theorem” と称され、その後様々な研究者によって一般化・応用がなされたことに伴い、多種多様な定理のステートメントが存在する。

以降では、Adams (1921) において用いられた、現在では Wolfram Web Resource (Weisstein, 2011) に掲げられているステートメントを用いることとする。

2. 1 定理の主張

当該定理の主張するところは以下のとおりである。 z が次式で示されるパラメータ α を有する p の関数であるとする：

$$z = p + \alpha\phi(z) \quad (3)$$

このとき、 z の任意関数 $F(z)$ が、十分小さい α に対して次式のような冪級数で表されるとするものである。

$$F(z) = F(p) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} \left\{ \phi(p)^m F'(p) \right\} \quad (4)$$

2. 2 定理の応用

今、我々は (3) 式及び (4) 式において $F(z) = z$ かつ $\alpha = -1$ である場合に関心がある。このとき、恒等的に $F'(z) = 1$ となることに留意すると、 p が z の

関数として

$$p = z + \phi(z) \quad (5)$$

という形で表されるときに、その逆に z を p で表す式として次式を得ることになる。

$$z = p + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^{m-1}}{\partial p^{m-1}} \left\{ -\phi(p) \right\}^m \quad (6)$$

Adams (1921) においては、正にこの方法が用いられ、対象としている計算式が導出されている。このとき $\phi(p)$ として用いられているのは、与えられた測地緯度に対して対応する赤道からの子午線弧長を求めるための計算式を、子午線象限 (赤道から極までの子午線弧長) で除し、さらにラジアン単位での直角を与える角度に相当する、円周率の半分を乗じたものである。これを (6) 式に従って累乗を計算した上で必要な階数の導関数を求め、然るべき係数を掛けて和をとれば目的は達成されるのである。

このように、行おうとしていることは高等学校の理系数学の範囲内にあると、口で言うのは誠にたやすい作業課題であるが、いざこれを手計算で実行し、誤りなく最終結果まで到達しようとするのは非常に大変な作業である。精度を上げようとして展開項を増やそうと思えば、たちどころに計算量は膨大なものとなり、人間の手によって実行するには潤沢な連続した時間と、ミスを犯さず根気よく計算するための強靱な精神力が必要とされるであろう。

そこで、筆者は河瀬 (2009) にて得られた、緯度

を与えて子午線弧長を計算する“一般式”を用いることにより、できるだけ計算機が処理を得意とする作業は計算機に余すところなくやらせるというスタンスで人間がお膳立てする部分の省力化を図りつつ、かつ、将来に向かっていつでも必要精度まで計算できる方法論を確立することを試みた。

3. 数式処理システム“Maxima”

Adams (1921) が発表された時代には考えられなかったことであるが、現在では計算機上で様々な代数計算を行うことが可能な数式処理システムが発達しており、フリーソフトウェアも存在している。本論では、このうち無償で使用可能な“Maxima” (Maxima.sourceforge.net, 2011) というシステムを用いる。

Maxima は、1960 年代後半に Massachusetts 工科大

学において開発され、米国エネルギー省によって配布されていた“Macysma”をその起源とし、1982 年以来この Macysma の維持管理に携わってきた William Frederick Schelter が、1998 年に米国エネルギー省から GNU General Public License を適用することを条件にソースコード公開の許可を得たものが基となっており、既に他の商用数式処理システムと比べても遜色のない機能を有しているが、現在もなお精力的に開発が続けられている。

システム自体のインストールは非常に簡単で、少しの試行錯誤で直ちに使うことができ、実行すること自体は難しくないが非常に面倒な計算をたちどころに行ってくれる、大変便利なツールである。

4. (1) 式に相当するより高次項を有する計算式の導出

4. 1 基となる計算式の準備

まず、河瀬 (2009) によれば、与えられた測地緯度 φ に対応する赤道からの子午線弧長 S_φ を計算する一般式として、

$$S_\varphi = \frac{a}{1+n} \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j \left(\frac{3n}{2k} - n \right) \right\}^2 \left[\varphi + \sum_{l=1}^{2j} \left(\frac{1}{l} - 4l \right) \sin 2l\varphi \prod_{m=1}^l \left\{ \frac{3n}{2j+2 \cdot (-1)^m \lfloor m/2 \rfloor} - n \right\}^{(-1)^m} \right] \quad (7)$$

が導出されている。この (7) 式から、逆に子午線弧長 S_{given} が与えられた際に、対応する測地緯度 φ を求める計算式を (6) 式を適用して導出するに当たっては、 φ は (6) 式の z に対応し、さらに p ((1) 式の θ に相当) として

$$p = \frac{(1+n)S_{given}}{a} \bigg/ \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j \left(\frac{3n}{2k} - n \right) \right\}^2 \quad (8)$$

を、 $\phi(p)$ として

$$\phi(p) = \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j \left(\frac{3n}{2k} - n \right) \right\}^2 \sum_{l=1}^{2j} \left(\frac{1}{l} - 4l \right) \sin 2lp \prod_{m=1}^l \left\{ \frac{3n}{2j+2 \cdot (-1)^m \lfloor m/2 \rfloor} - n \right\}^{(-1)^m} \bigg/ \sum_{j=0}^{\infty} \left\{ \prod_{k=1}^j \left(\frac{3n}{2k} - n \right) \right\}^2 \quad (9)$$

を考えればよいことが容易に分かる。しかも (7) 式は近似の一切無い一般式として与えられているため、(9) 式の j を必要に応じて設定し直すだけで、計算機の性能の許す限り所望の精度の計算式を得ることができる。

4. 2 Maxima を用いた計算式の導出

上記までの前提で、Maxima において (6) 式に示す代数計算をさせた結果が図-1 である。図-1 の (%i3) において、 $w(p)$ (計算の便宜上 $\phi(p)$ の符号を反転させたものをこのように置き換えている) としては念のため $j=6$ までとり、 n^{12} までの項を正しく与える式を保持してある。この条件下で、図-1 の (%i4) に示

すとおりに、 n^8 の項までを有効に保持した $w(p)$ の冪乗（8乗まで）をそれぞれ計算し、当該関数の導関数を逐次求め、(6)式の和を取りまとめるとともに、 n についてTaylor級数展開した上で、最終的に積和公式を駆使した三角関数の整形及び分数係数の通分整理までをシステム上で一気に行っている。

```
(%i1) build_info()
```

```
Maxima version: 5.23.2
Maxima build date: 11:22 2/2/2011
Host type: i686-pc-mingw32
Lisp implementation type: GNU Common Lisp (GCL)
Lisp implementation version: GCL 2.6.8
```

```
(%i2) if showtime#false then showtime:false else showtime:all$
```

```
Evaluation took 0.0000 seconds (0.0000 elapsed)
```

```
(%i3) w(p):=-sum((product(3*n/(2*k)-n, k, 1, j))^2*sum((1/(-4)^j)*sin(2*j*p)
*product((3*n/(2*(j+(-1)^m*floor(m/2)))-n)^((-1)^m), m, 1, 1), 1, 1, 2*j), j, 0, 6)
/sum((product(3*n/(2*k)-n, k, 1, j))^2, j, 0, 6);
```

```
Evaluation took 0.0000 seconds (0.0000 elapsed)
```

$$w(p) := \frac{-\sum_{j=0}^6 \prod_{k=1}^j \left(\frac{3n}{2k} - n\right) \sum_{l=1}^{2j} \binom{1-4l}{l} \sin(2lp) \prod_{m=1}^1 \left(\frac{3n}{2 \binom{j+(-1)^m \lfloor \frac{m}{2} \rfloor}} - n\right)^{(-1)^m}}{\sum_{j=0}^6 \prod_{k=1}^j \left(\frac{3n}{2k} - n\right)^2}$$

```
(%i4) expand(trigrat(taylor(sum(diff(w(p))^k, p, k-1)/k!, k, 1, 8), n, 0, 8));
```

```
Evaluation took 0.8300 seconds (0.8300 elapsed)
```

$$\begin{aligned} (\%o4) & \frac{332287993 n^8 \sin(16 p)}{27525120} + \frac{6459601 n^7 \sin(14 p)}{860160} - \frac{5962461 n^8 \sin(12 p)}{286720} + \frac{293393 n^6 \sin(12 p)}{61440} \\ & - \frac{69119 n^7 \sin(10 p)}{6144} + \frac{8011 n^5 \sin(10 p)}{2560} + \frac{2514467 n^8 \sin(8 p)}{245760} - \frac{15543 n^6 \sin(8 p)}{2560} + \frac{1097 n^4 \sin(8 p)}{512} \\ & - \frac{87963 n^7 \sin(6 p)}{20480} - \frac{417 n^5 \sin(6 p)}{128} + \frac{151 n^3 \sin(6 p)}{96} - \frac{155113 n^8 \sin(4 p)}{122880} + \frac{6759 n^6 \sin(4 p)}{4096} \\ & - \frac{55 n^4 \sin(4 p)}{32} + \frac{21 n^2 \sin(4 p)}{16} - \frac{6607 n^7 \sin(2 p)}{24576} + \frac{269 n^5 \sin(2 p)}{512} - \frac{27 n^3 \sin(2 p)}{32} + \frac{3 n \sin(2 p)}{2} \end{aligned}$$

Created with [wxMaxima](#).

図-1 数式処理ソフト“Maxima”を用いて計算した結果画面の抜粋（一部表示のために加工）

ここまで、システムに入力したコマンドは、図-1の冒頭(%i1)のMaximaのビルド情報表示及び(%i2)の計算に要した経過時間表示のコマンドを除き、(%i3)及び(%i4)に示されているたったの2行である。こ

これらのコマンドに含まれる各種機能の動作仕様を理解するのにそれほどの時間は要しないであろう。また、実際に計算機（筆者に与えられた官給の事務用パソコン）が行った計算時間は、図-1に示されているとおり、ものの1秒も経っていない（0.83秒）ことが判明した。Maxima以外の他の数式処理システムにおいても、この状況はほとんど変わらないと考えられる。

図-1の(%o4)の結果に基づいて、今後の計算機の発展を見据えても十分すぎると考えられる n^8 の項までの計算式について、(1)式との対比が容易なように、共通した正弦関数ごとに分数係数を整理した形で次式に示す。

$$\varphi \approx \theta + A_2 \sin 2\theta + A_4 \sin 4\theta + A_6 \sin 6\theta + A_8 \sin 8\theta + A_{10} \sin 10\theta + A_{12} \sin 12\theta + A_{14} \sin 14\theta + A_{16} \sin 16\theta \quad (10)$$

$$\theta = \frac{(1+n)S_{given}}{a} \left/ \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \frac{n^6}{256} + \frac{25}{16384}n^8 \right) \right., \quad A_2 = \frac{3}{2}n - \frac{27}{32}n^3 + \frac{269}{512}n^5 - \frac{6607}{24576}n^7,$$

$$A_4 = \frac{21}{16}n^2 - \frac{55}{32}n^4 + \frac{6759}{4096}n^6 - \frac{155113}{122880}n^8, \quad A_6 = \frac{151}{96}n^3 - \frac{417}{128}n^5 + \frac{87963}{20480}n^7,$$

$$A_8 = \frac{1097}{512}n^4 - \frac{15543}{2560}n^6 + \frac{2514467}{245760}n^8, \quad A_{10} = \frac{8011}{2560}n^5 - \frac{69119}{6144}n^7,$$

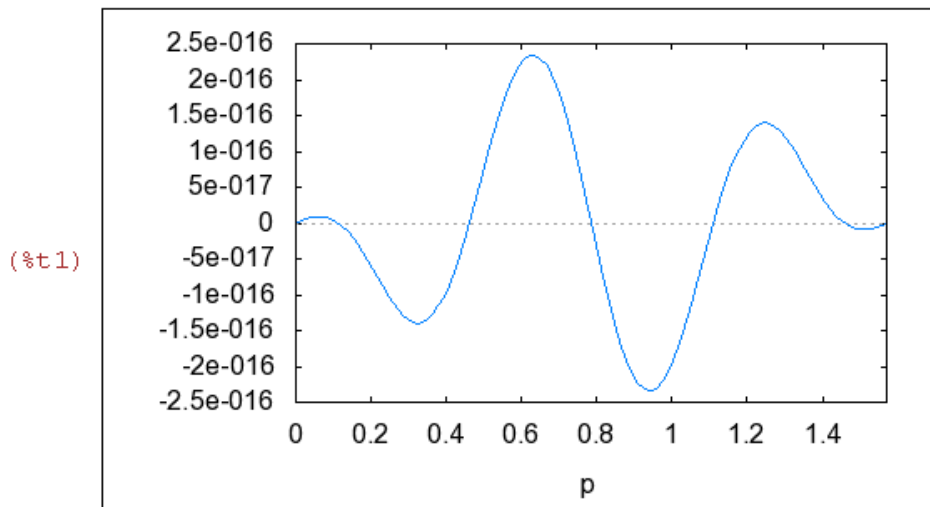
$$A_{12} = \frac{293393}{61440}n^6 - \frac{5962461}{286720}n^8, \quad A_{14} = \frac{6459601}{860160}n^7, \quad A_{16} = \frac{332287993}{27525120}n^8$$

4. 3 導出した計算式の評価

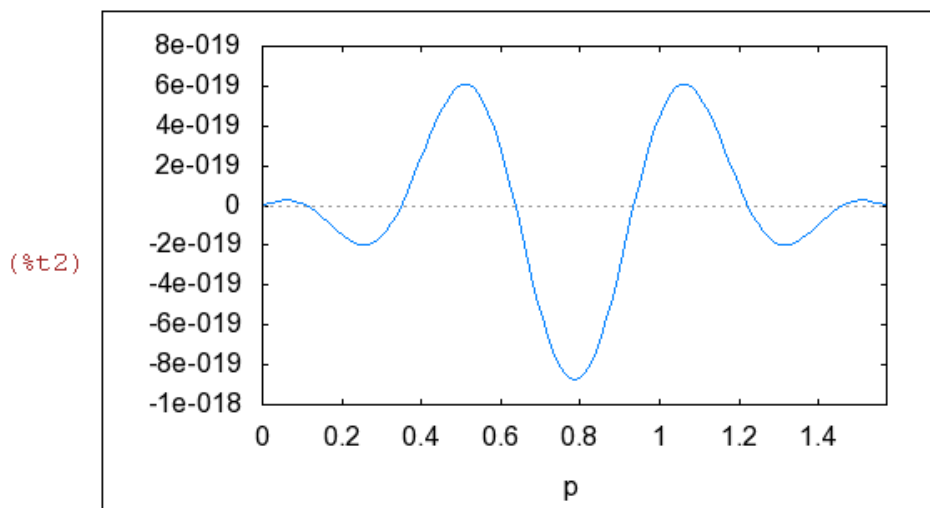
上に示した(10)式において、König et al. (1951)においてかなりの労苦を費やして導出されたであろうと推測される(1)式の内容を完全に包含していることは、両者の分数係数の比較により容易に確認できる。同時にこの結果は、独立に別々のアプローチにて取り組まれた計算結果の正確性を一定程度担保するものにもなると言えよう。

この(10)式を用いて、32bit計算機における倍精度実数型計算の有効桁(15桁)まで及び64bit計算機における拡張倍精度実数型計算の有効桁(18桁)まで正しく数値を与えるためには、 n の何乗の項まで計算すべきかについてMaximaを用いて評価してみる。(10)式において n^6 の項及び n^7 の項だけをそれぞれピックアップし、楕円体パラメータをGRS 80のものとした上で、(10)式の θ (便宜上 p とおく)の変域内($0 \leq p \leq \pi/2$)でその大きさの変化をグラフ化すると、図-2のようになる。

```
--> wxplot2d([(293393*sin(12*p)/61440-15543*sin(8*p)/2560+759*sin(4*p)/4096)
*(0.5/(298.257222101-0.5))^6], [p, 0, float(%pi)/2])$
```



```
--> wxplot2d([(6459601*sin(14*p)/860160-69119*sin(10*p)/6144+87963*sin(6*p)/20480
-6607*sin(2*p)/24576)*(0.5/(298.257222101-0.5))^7], [p, 0, float(%pi)/2])$
```



Created with [wxMaxima](#).

図-2 Maxima を用いて (10) 式の n^6 の項及び n^7 の項をグラフ化した結果画面の抜粋 (一部表示のために加工)

図-2のとおり、 n^6 の項の絶対値は p ((10)式の θ に相当)の全変域について 10^{-15} 以上になることはなく、かつ、(10)式の主要項である θ の大きさについては、我が国における測量地域として関心のある緯度帯の範囲内においては概ね 10^{-1} のオーダーであることから、32bit 倍精度実数型の有効桁の範囲内においては n^6 の項まで取る必要はなく、作業規程の準則に今般規定された(1)式は十分な精度を有していることが確認できる。

同様に、 n^7 の項の絶対値は p の全変域について 10^{-18} 以上になることはないため、64bit 拡張倍精度実数型の有効桁の範囲内においては n^7 の項まで取る必要はないことが判断できる。すなわち、今後64bit 計算機が完全に世の中に普及したとしても、当面は n^6 の項まで取ればデフォルトで用意されている有効桁の範囲内で結果の誤解が生じないことが分かる。

5. まとめ

作業規程の準則に新たに採用された、赤道からの子午線弧長を与えて該当する測地緯度を求める計算式は、以前の計算式よりも簡潔で、なおかつ非常に収束が速いものであるが、今後さらに計算精度を高める需要が生じた際に、従来の計算方法にて高次項の計算を実行しようとするると多大な手間を必要とする可能性があった。

今回、数式処理システム“Maxima”を用いることで、たった2行のコマンド入力により、従来であれば途方に暮れるような数式処理計算をものの1秒もしないうちに実行できることが確認され、同時に現行の作業規程の準則に掲載されている計算式の正確性を別の形で確認することができたとともに、将来に備えて十分高次までの項を求めることができた。

計算の実行に当たって、システムへのコマンド入力の手間が非常に少なく抑えられたのには、あらかじめ緯度を与えて赤道からの子午線弧長を求める一般式が導出できていたことが大きく貢献している。

導出された方法論により、現在において通常使われている計算機の性能で、今後必要に応じて容易に精度を拡張することができる。

謝 辞

本稿を取りまとめるにあたって、国土地理院地理地殻活動研究センターの政春尋志センター長にはMaximaという非常に素晴らしい数式処理システムの存在を御示唆いただいたとともに、内容について大変有益な御助言を賜った。ここに記して感謝申し上げる。

参 考 文 献

- Adams, O. S. (1921): Latitude Developments Connected with Geodesy and Cartography, United States Coast and Geodetic Survey, Special Publication 67, Washington, 126-127,
http://docs.lib.noaa.gov/rescue/cgs_specpubs/QB275U35no671921.pdf (accessed 1 Mar. 2011).
- Bowring, B. R. (1983): New equations for meridional distance, Bulletin Géodésique (Journal of Geodesy), 57, 374-381.
- Ганьшин, В. Н. (1967): Геометрия земного эллипсоида, Издательство «Недра», Москва, 32-34.
- 原田健久 (1960) : 赤道からの子午線弧長を与えて緯度を求める計算式, 測地学会誌, 6, 75-77,
<http://www.journalarchive.jst.go.jp/jnlpdf.php?cdjournal=sokuchi1954&cdvol=6&noissue=3&startpage=75&lang=ja&from=jnlto> (accessed 3 Mar. 2011).
- Helmert, F. R. (1880): Die mathematischen und physikalischen Theorieen der höheren Geodäsie, Einleitung und 1 Teil, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, 53-55,
<http://books.google.com/books?id=ibsJAAAAMAAJ&hl=ja&pg=PR4#v=onepage&q&f=false> (accessed 3 Mar. 2011).
- 河瀬和重 (2009) : 緯度を与えて赤道からの子午線弧長を求める一般的な計算式, 国土地理院時報, 119, 45-55,
<http://www.gsi.go.jp/common/000054736.pdf> (accessed 3 Mar. 2011).
- 国土地理院編 (2011) : 作業規程の準則 (平成 20 年国土交通省告示第 413 号, 最終改正平成 23 年国土交通省告示第 334 号), 付録 6 計算式集, 基準点測量 2.9.5,
<http://psgsv.gsi.go.jp/koukyou/jyunsoku/pdf/furoku-6.pdf> (accessed 7 Apr. 2011).
- König, R. and Weise, K. H. (1951): Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie, 1, Das Erdsphäroid und seine konformen Abbildungen, Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 49-54.
- Krüger, L. (1912): Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, Veröffentlichung Königlich Preussischen geodätischen Institutes, Neue Folge, 52, Druck und Verlag von B. G. Teubner, Potsdam, 12-13,
<http://bib.gfz-potsdam.de/pub/digi/krueger2.pdf> (accessed 13 Oct. 2009).
- Lagrange, J. L. (1770): Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des series, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 24, 251-326,
in Œuvres de Lagrange, 3 (Gauthier-Villars, Paris, 1869), pp. 5-73,
<http://books.google.com/books?id=YwPAAAAIAAJ&hl=ja&pg=PA5#v=onepage&q&f=false> (accessed 2 Mar. 2011).

- 政春尋志 (2001) : 数式処理ソフトを用いた子午線弧長から緯度を求める式の導出, 測地学会誌, 47, 787-797,
<http://www.journalarchive.jst.go.jp/jnlpdf.php?cdjournal=sokuchi1954&cdvol=47&noissue=4&startpage=787&lang=ja&from=jnlto> (accessed 3 Mar. 2011).
- Maxima.sourceforge.net (2011): Maxima, a Computer Algebra System, Version 5.23.2,
<http://maxima.sourceforge.net/> (accessed 1 Mar. 2011).
- 斎藤正徳 (1973) : 測地学・天文学にあらわれるフーリエ級数の逆フーリエ級数, 測地学会誌, 19, 233-235,
<http://www.journalarchive.jst.go.jp/jnlpdf.php?cdjournal=sokuchi1954&cdvol=19&noissue=4&startpage=233&lang=ja&from=jnlto> (accessed 3 Mar. 2011).
- Weisstein, E. W. (2011): "Lagrange Inversion Theorem." From MathWorld--A Wolfram Web Resource,
<http://mathworld.wolfram.com/LagrangeInversionTheorem.html> (accessed 1 Mar. 2011).